6. Correction des exercices

Exercice 9.1 a) $f(x) = 6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1$

$f(x)$ est une somme des termes $6x^4$ et $-3x^3$ et $2x^2$ et -1.
On va dériver chaque terme séparément, puis ajouter les dérivées ainsi obtenues ; on en a le droit grâce à la propriété sur la dérivée d'une somme.
Dérivons le terme $6x^4$.
Il s'agit d'un terme du type x^n, qui est multiplié par une constante.
Un terme du type x^n se dérive en nx^{n-1}.
Donc x^4 se dérive en $4 \times x^{4-1}$, c'est-à-dire $(x^4)' = 4x^3$.
Ensuite, grâce à la propriété sur le "produit par un réel", on a : $(6 \times x^4)' = 6 \times (x^4)'$.
Donc $(6x^4)' = 6 \times 4x^3 = 24x^3$.
Dérivons le terme $-3x^3$.
C'est la même démarche : on commence par dériver la puissance : $(x^3)' = 3x^2$.
Ensuite, on multiplie par le réel -3, d'où $(-3x^3)' = -3 \times (x^3)' = -3 \times 3x^2 = -9x^2$.
Donc $(-3x^3)' = -9x^2$.
Dérivons le terme $2x^2$.
C'est toujours pareil ! $(2x^2)' = 2 \times (x^2)' = 2 \times 2x^1 = 2 \times 2x = 4x$.
Donc $(2x^2)' = 4x$.
Dérivons le terme -1.
C'est un terme constant, donc $(-1)' = 0$.
Regroupons tous les termes :

$$\begin{aligned} f'(x) = (6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1)' &= (6x^4)' + (-3x^3)' + (2x^2)' + (-1)' \\ &= 24x^3 - 9x^2 + 4x + 0 \\ f'(x) &= 24x^3 - 9x^2 + 4x \end{aligned}$$

b) $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 4x + 2$

C'est exactement pareil, on travaille séparément sur chaque terme.
Rappelons que la notation $g'(x)$ représente la fonction dérivée de g.
Cela donne :

$$\begin{aligned} g'(x) &= (\tfrac{1}{3}x^3)' + (\tfrac{1}{2}x^2)' + (-4x)' + (2)' && \text{on "coupe" la somme en termes (on "prend" les signes - avec le terme conc} \\ &= \tfrac{1}{3}(x^3)' + \tfrac{1}{2}(x^2)' + (-4x)' + (2)' && \text{on "sort" les "multiplications par un} \\ &= \tfrac{1}{3} \times 3x^2 + \tfrac{1}{2} \times 2x + (-4) + 0 && \text{on dérive chaque "puissa} \\ &= 1x^2 + 1x - 4 && \text{on simplifie un peu en effectuant les multiplica} \\ g'(x) &= x^2 + x - 4 && \text{on a} \end{aligned}$$

c) $h(x) = \frac{3x^3 - 4x^2 + 5x - 1}{5}$

En fait, même si l'expression fait peur ("Ah ! Mais c'est un quotient ! Je ne sais pas faire !"), c'est comme la question précédente : ce n'est pas vraiment un quotient, si l'on écrit :

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{3x^3 - 4x^2 + 5x - 1}{5} \\ &= \frac{1}{5}\left(3x^3 - 4x^2 + 5x - 1\right) \\ &= \frac{3}{5}x^3 - \frac{4}{5}x^2 + \frac{5}{5}x - 1 \times \frac{1}{5} \\ &= \frac{3}{5}x^3 - \frac{4}{5}x^2 + 1x - \frac{1}{5} \end{aligned}$$

On se ramène à une fonction qui ressemble à celle de la question b), et on la dérive de la même manière :

$$
\begin{array}{rcll}
h'(x) & = & (\frac{3}{5}x^3)' + (-\frac{4}{5}x^2)' + (1x)' + (-\frac{1}{5})' & \text{on "coupe" la somme en termes} \\
& = & \frac{3}{5}(x^3)' - \frac{4}{5}(x^2)' + 1(x)' + (-\frac{1}{5})' & \text{on "sort" les "multiplications par un réel"} \\
& = & \frac{3}{5} \times 3x^2 - \frac{4}{5} \times 2x + 1 \times x^0 + 0 & \text{on dérive chaque "puissance"} \\
& = & \frac{9}{5}x^2 - \frac{8}{5}x + 1 \times 1 + 0 & \text{on simplifie un peu en effectuant les multiplications} \\
h'(x) & = & \frac{9}{5}x^2 - \frac{8}{5}x + 1 & \text{on a fini !}
\end{array}
$$

Où le dernier terme vaut zéro parce qu'il vient de la dérivation d'une fonction constante...

Exercice 9.2 **1)** Pourquoi la fonction f définie sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ par :
$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \sqrt{x}$ est-elle dérivable sur I ?

La fonction f est la somme des termes $\frac{1}{4}x^3$ et $-\frac{3}{2}x^2$ et $\sqrt{x}$.
Regardons séparément pour chaque terme s'il est bien dérivable sur $I = \mathbb{R}_+^*$.

Le terme $\frac{1}{4}x^3$ est la multiplication par le réel $\frac{1}{4}$ de la fonction "puissance" x^3.
En fait, ces "fonctions puissances" s'appellent des "monômes" - comme dans "polynôme", sauf qu'il n'y a qu'un terme.
Comme les monômes, d'après le paragraphe du cours sur les fonctions $x \mapsto x^n$, sont dérivables sur $\mathbb{R}$, leur produit par un réel l'est aussi, donc ce premier terme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Le terme $-\frac{3}{2}x^2$ est aussi le produit d'un monôme par un réel, donc ce terme aussi est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Le terme $\sqrt{x}$, d'après le paragraphe du cours sur la dérivation de la fonction racine carrée, est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ uniquement.
C'est à cause de ce terme que la somme des trois termes, c'est-à-dire la fonction f, ne sera dérivable que sur $\mathbb{R}_+^*$ et pas sur $\mathbb{R}$ tout entier.
Si vous voulez, on peut dire que "le troupeau avance à la vitesse de l'animal le plus lent". C'est-à-dire que la fonction ne sera dérivable que sur le plus petit intervalle imposé par chacun de ses termes.
... C'est le terme le plus "ronchonchon" qui fait sa loi !

2) Calculez, pour tout $x \in I$, $f'(x)$.
On sépare les termes, comme d'habitude. Il vient :

$$
\begin{array}{rcll}
f'(x) & = & (\frac{1}{4}x^3)' + (-\frac{3}{2}x^2)' + (\sqrt{x})' & \text{on "coupe" la somme en termes} \\
& = & \frac{1}{4}(x^3)' - \frac{3}{2}(x^2)' + (\sqrt{x})' & \text{on "sort" les "multiplications par un réel"} \\
& = & \frac{1}{4} \times 3x^2 - \frac{3}{2} \times 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{on dérive chaque "puissance" et la "racine"} \\
& = & \frac{3}{4}x^2 - \frac{6}{2}x + \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{on simplifie un peu en effectuant les multiplications} \\
f'(x) & = & \frac{3}{4}x^2 - 3x + \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{on a fini !}
\end{array}
$$

Un "petit truc" en passant : la fonction "racine carrée" s'écrit aussi sous forme de puissance ; en effet, on a, pour tout $x > 0$, $\sqrt{x} = x^{1/2}$.
Du coup, si on est à l'aise avec le calcul fractionnaire, on peut "retrouver" la formule de la dérivation d'une racine carrée à partir de celle d'une puissance.
On a $(x^n)' = n \times x^{n-1}$, donc pour $n = \frac{1}{2}$, cela donne :

$$
\begin{array}{rcl}
(\sqrt{x})' & = & (x^{\frac{1}{2}})' \\
& = & \dfrac{1}{2} \times x^{\frac{1}{2}-1} \\
& = & \dfrac{1}{2} \times x^{-\frac{1}{2}} \\
& = & \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \\
& = & \dfrac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} \\
& = & \dfrac{1}{2\sqrt{x}}
\end{array}
$$

Exercice 9.3 **a)** Cette fois-ci ce sont des produits et non des sommes.
Pour les sommes, nous dérivions séparément chaque terme ; pour les produits, nous allons dériver séparément chaque facteur.

Ensuite, nous appliquerons la formule de dérivation d'un produit : $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.
Il faut d'abord vérifier sur quel intervalle chacun des facteurs est dérivable, mais comme ce sont des polynômes, ils sont dérivables sur $\mathbb{R}$: il n'y a donc pas de problème.
Pour mieux "coller" à la formule, appelons les deux facteurs de notre multiplication "u" et "v".
On a $f(x) = (2x-1)(5x+8)$, donc on va noter $u(x) = 2x-1$ (c'est le premier facteur) et $v(x) = 5x+8$ (c'est le second facteur).
On va calculer "tranquillement", à part, les dérivées de chacuns de ces facteurs, et on appliquera ensuite "la formule de dérivation d'un produit".
Dérivée du premier facteur :
$u(x) = 2x-1$, donc $u'(x) = (2x)' + (1)' = 2 + 0 = 2$; où le terme "$+0$" vient de ce que l'on dérive un terme constant.
Dérivée du second facteur :
$v(x) = 5x+8$, donc $v'(x) = (5x)' + (8)' = 5 + 0 = 5$.
On "met tout ça dans la formule" :

$$\begin{array}{lclcll}
f'(x) & = & u'(x)v(x) & + & u(x)v'(x) & \text{On écrit la formule} \\
 & = & (2)\times(5x+8) & + & (2x-1)\times(5) & \text{On remplace u, v, u' et v' par leurs valeurs} \\
 & = & 10x+16 & + & 10x-5 & \text{On développe} \\
f'(x) & = & 20x & + & 11 & \text{On réduit et c'est fini !}
\end{array}$$

Et ce calcul est valable sur $\mathbb{R}$ car f est un produit de polynômes.

b) $f(x) = (\sqrt{x}+1)^2$
Un carré est un produit, dont les deux facteurs sont égaux. On pose donc $u(x) = \sqrt{x}+1$ et $v(x) = \sqrt{x}+1$.
On peut aussi utiliser la formule de dérivation du carré d'une fonction.
On a donc $u'(x) = v'(x) = (\sqrt{x}+1)' = (\sqrt{x})' + (1)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Dans la formule de dérivation d'un produit, il vient :

$$\begin{array}{lclcll}
f'(x) & = & u'(x)v(x) & + & u(x)v'(x) & \text{On écrit la formule} \\
 & = & \frac{1}{2\sqrt{x}}\times(\sqrt{x}+1) & + & (\sqrt{x}+1)\times\frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{Non ! On ne peut pas "simplifier" par } \sqrt{x} \text{ (pas en facteur dans le terr} \\
 & = & \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} & + & \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} & \text{On simplifie un peu} \\
 & = & 2\frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} & & & \text{On réduit un peu} \\
f'(x) & = & \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} & & & \text{On simplifie par 2, et c'est fini !}
\end{array}$$

Et ce calcul est valable sur $\mathbb{R}_+^*$ car c'est sur cet intervalle que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable. *(C'est elle, "l'animal le plus lent du troupeau"...)*

c) $f(x) = (x^2-x)\sqrt{x}$
Ici, $u(x) = x^2 - x$, donc $u'(x) = 2x - 1$.
$v(x) = \sqrt{x}$, donc $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
Dans la formule de dérivation d'un produit, il vient :

$$\begin{array}{lclcll}
f'(x) & = & u'(x)v(x) & + & u(x)v'(x) & \text{On écrit la formule} \\
 & = & (2x-1)\times\sqrt{x} & + & (x^2-x)\times\frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{On remplace par les valeurs} \\
 & = & \frac{(2x-1)\times\sqrt{x}\times2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} & + & \frac{(x^2-x)}{2\sqrt{x}} & \text{On "met au même dénominateur"} \\
 & = & \frac{(2x-1)\times\sqrt{x}\times2\sqrt{x}+(x^2-x)}{2\sqrt{x}} & & & \\
 & = & \frac{(2x-1)\times2x+x^2-x}{2\sqrt{x}} & & & \text{On simplifie} \\
 & = & \frac{4x^2-2x+x^2-x}{2\sqrt{x}} & & & \text{On développe} \\
f'(x) & = & \frac{5x^2-3x}{2\sqrt{x}} & & & \text{On réduit, c'est fini !} \\
f'(x) & = & \frac{\sqrt{x}}{2}(5x-3) & & & \text{Si l'on veut, on peut aussi écrire } f' \text{ comme ça...}
\end{array}$$

Et ce calcul est valable sur $\mathbb{R}_+^*$ car c'est sur cet intervalle que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable.
N.B. : Pour "vérifier" que la seconde écriture proposée pour f' est valable, développer et réduire...

<u>**Exercice**</u> **9.4** Comme pour les produits, et les sommes, on va "découper" les quotients pour s'occuper séparément de chaque élément. Ensuite, on appliquera la formule de dérivation d'un quotient, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$.
Cependant, il faut redoubler de prudence avec les quotients : le dénominateur ne doit jamais être nul : cela correspond à la condition $v(x) \neq 0$ de la propriété.

a) $f(x) = -\frac{4}{x^3} = \frac{-4}{x^3}$

NE PAS OUBLIER :

- l'ensemble de définition de f : $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^*$

- l'ensemble de dérivabilité de f : $\mathbb{R}^*$ $\leftarrow$ Pour déterminer celui-ci, en fait on "triche" un peu : on laisse la ligne "en blanc", et on complète l'ensemble de dérivabilité après avoir calculé la dérivée !!!

Ici, on a : $f(x) = \frac{-4}{x^3} = \frac{u}{v}$, en posant $u = -4$ et $v = x^3$.
On va dériver séparément u et v :
$u = -4$, donc $u' = 0$, dérivée d'une fonction constante.
$v = x^3$, donc $v' = 3x^2$, dérivée d'un monôme.

On applique maintenant "bêtement" la formule :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\
f'(x) &= \frac{0 \times (x^3) - (-4) \times (3x^2)}{(x^3)^2} \\
f'(x) &= \frac{0 + 4 \times (3x^2)}{(x^3)^2} \\
f'(x) &= \frac{0 + 12x^2}{x^6} \\
f'(x) &= \frac{12x^2}{x^6}
\end{aligned}$$

On a terminé l'application de la formule de dérivation d'un quotient, il ne reste plus qu'à simplifier le résultat obtenu. Pour cela, on divise le numérateur et le dénominateur par x^2 (on en a le droit puisqu'à cause de $\mathscr{D}_f$, on a $x \neq 0$.
On obtient :

$$f'(x) = \frac{12}{x^4}$$

Maintenant que nous avons déterminé la dérivée, on peut retrouver "l'ensemble de dérivabilité" : c'est la plupart du temps le domaine de définition de la fonction dérivée !!!! Donc ici, l'ensemble de dérivabilité est $\mathbb{R}^*$, et on complète la ligne "ensemble de dérivabilité" laissée en blanc au début de l'exercice...

b) $f(x) = \frac{1-2x}{x-2}$

NE PAS OUBLIER :

- l'ensemble de définition de f : $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} - \{2\}$
- l'ensemble de dérivabilité de f : $\mathbb{R} - \{2\}$

Ici, on a : $f(x) = \frac{1-2x}{x-2} = \frac{u}{v}$, en posant $u = 1 - 2x$ et $v = x - 2$.
On va dériver séparément u et v :
$u = 1 - 2x$, donc $u' = -2$
$v = x - 2$, donc $v' = 1$
On applique maintenant "bêtement" la formule :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\
f'(x) &= \frac{(-2) \times (x-2) - (1-2x) \times (1)}{(x-2)^2} \\
f'(x) &= \frac{-2x + 4 - 1 + 2x}{(x-2)^2} \\
f'(x) &= \frac{3}{(x-2)^2}
\end{aligned}$$

Il ne faut surtout pas développer le dénominateur : on aura besoin qu'il soit sous forme factorisée pour étudier son signe dans le chapitre "Applications de la dérivations".
...Et n'oublions pas de remplir la ligne "ensemble de dérivabilité", que nous avons laissée "en blanc" tout-à-l'heure !

c) $f(x) = \frac{2-x^2}{2+x^2}$

NE PAS OUBLIER :

- l'ensemble de définition de f : $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ (le dénominateur ne risque pas d'être nul, car x^2 est positif, et ne risque donc pas de valoir -2...
- l'ensemble de dérivabilité de f : $\mathbb{R}$

Ici, on a : $f(x) = \frac{2-x^2}{2+x^2} = \frac{u}{v}$, en posant $u = 2 - x^2$ et $v = 2 + x^2$.
On va dériver séparément u et v :
$u = 2 - x^2$, donc $u' = -2x$
$v = 2 + x^2$, donc $v' = 2x$

On applique maintenant "bêtement" la formule :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\
f'(x) &= \frac{(-2x) \times (2 + x^2) - (2 - x^2) \times (2x)}{(2 + x^2)^2} \\
f'(x) &= \frac{-4x - 2x^3 - 4x + 2x^3}{(2 + x^2)^2} \\
f'(x) &= \frac{-8x}{(2 + x^2)^2}
\end{aligned}$$

- Ne pas développer le dénominateur
- Remplir la ligne "ensemble de dérivabilité"

d) $f(x) = \frac{2x^2}{1-x}$

NE PAS OUBLIER :
- l'ensemble de définition de f : $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} - \{1\}$
- l'ensemble de dérivabilité de f : $\mathbb{R} - \{1\}$

Ici, on a : $f(x) = \frac{2x^2}{1-x} = \frac{u}{v}$, en posant $u = 2x^2$ et $v = 1 - x$.
On va dériver séparément u et v :
$u = 2x^2$, donc $u' = 4x$
$v = 1 - x$, donc $v' = -1$

On applique maintenant "bêtement" la formule :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\
f'(x) &= \frac{(4x) \times (1 - x) - (2x^2) \times (-1)}{(1 - x)^2} \\
f'(x) &= \frac{4x - 4x^2 + 2x^2}{(1 - x)^2} \\
f'(x) &= \frac{4x - 2x^2}{(1 - x)^2}
\end{aligned}$$

- Ne pas développer le dénominateur
- Remplir la ligne "ensemble de dérivabilité"

Vous avez dû le remarquer : le piège de la formule de dérivation d'un quotient, c'est qu'il y a une soustraction au numérateur ; on a tendance à confondre avec la formule de dérivation d'un produit, qui comprend une addition ; du coup, on oublie le "$-$"...

Exercice 9.5 1) f est une "fraction rationnelle" (*ça veut juste dire un quotient de deux polynômes*) ; elle est définie et dérivable lorsque son dénominateur est non nul. Or ici le dénominateur ne serait nul que si $x^2 = -1$, ce qui est impossible car un carré est toujours positif.
Donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ici, on a : $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$, en posant $u = 3x$ et $v = x^2 + 1$.
On va dériver séparément u et v :

$u = 3x$, donc $u' = 3$
$v = x^2 + 1$, donc $v' = 2x$

On applique maintenant "bêtement" la formule :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\
f'(x) &= \frac{(3) \times (x^2+1) - (3x) \times (2x)}{(x^2+1)^2} \\
f'(x) &= \frac{3x^2 + 3 - 6x^2}{(x^2+1)^2} \\
f'(x) &= \frac{-3x^2 + 3}{(x^2+1)^2}
\end{aligned}$$

On peut factoriser f' (c'est une bonne habitude à prendre pour la suite de nos aventures...).

$$f'(x) = \frac{3(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

2) Déterminez une équation de la tangente à $\mathscr{C}$, courbe représentative de f, au point d'abscisse a, où a est un nombre quelconque.
On peut par exemple se référer au chapitre sur le nombre dérivé pour se remémorer la formule qui donne l'équation de la tangente :

$$T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Or ici, on a $f(a) = \frac{3a}{a^2+1}$, et no vient de voir que $f'(a) = \frac{3(1-a^2)}{(a^2+1)^2}$.
En remplaçant dans la formule de la tangente ci-dessus, il vient :

$$\begin{aligned}
y &= f'(a)(x-a) + f(a) \\
y &= \frac{3(1-a^2)}{(a^2+1)^2} \times (x-a) + \frac{3a}{a^2+1}
\end{aligned}$$

$$T_a : y = \frac{3(1-a^2)}{(a^2+1)^2} \times (x-a) + \frac{3a}{a^2+1}$$

Et voilà !

Exercice 9.6 f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par :
$f(x) = \frac{4x+1}{x-2}$ et $g(x) = \frac{9}{x-2}$.

1.a) Prouvez que f et g sont dérivables sur $]-\infty; 2[$ et sur $]2; +\infty[$.
f et g sont des fractions rationnelles ; elles sont définies et dérivables lorsque leurs dénominateurs sont non nuls. *(On commence à voir que cette phrase sert souvent, non ? - voir l'ex. précédent -)*
On a $x - 2 \neq 0 \Longleftrightarrow x \neq 2$, donc f et g sont définies et dérivables sur $]-\infty; 2[$ et sur $]2; +\infty[$.

1.b) Calculez $f'(x)$ et $g'(x)$.
Que remarquez-vous ?
Calculons $f'(x)$:
Ici, on a : $f(x) = \frac{4x+1}{x-2}$, en posant $u = 4x + 1$ et $v = x - 2$.
On va dériver séparément u et v :
$u = 4x + 1$, donc $u' = 4$
$v = x - 2$, donc $v' = 1$

On applique maintenant "bêtement" la formule :

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v-uv'}{v^2} \\
f'(x) &= \frac{(4)\times(x-2)-(4x+1)\times(1)}{(x-2)^2} \\
f'(x) &= \frac{4x-8-4x-1}{(x-2)^2} \\
f'(x) &= \frac{-9}{(x-2)^2}
\end{aligned}
$$

Calculons $g'(x)$:

Ici, on a : $g(x)=\frac{9}{x-2}$, en posant $u=9$ et $v=x-2$.
On va dériver séparément u et v :
$u=9$, donc $u'=0$
$v=x-2$, donc $v'=1$

On applique maintenant "bêtement" la formule :

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v-uv'}{v^2} \\
g'(x) &= \frac{(0)\times(x-2)-(9)\times(1)}{(x-2)^2} \\
g'(x) &= \frac{-9}{(x-2)^2}
\end{aligned}
$$

On remarque que pour tout $x\in\mathbb{R}-\{2\}$, $f'(x)=g'(x)$.

2) Calculez $f(x)-g(x)$.
Justifiez alors la remarque de la question 1.
On soustrait deux fractions : mais on a de la chance, elles sont déjà au même dénominateur.
$f(x)-g(x)=\frac{4x+1}{x-2}-\frac{9}{x-2}=\frac{4x+1-9}{x-2}=\frac{4x-8}{x-2}$
Il semble ne rien se passer de spécial : c'est parce qu'il faut simplifier la fraction, en commençant par factoriser le numérateur :
$f(x)-g(x)=\frac{4(x-2)}{x-2}=4$, en simplifiant par $(x-2)$, ce qu'on a le droit de faire puisque $x\neq 2 \Rightarrow (x-2)\neq 0$.
Ainsi, la fonction $f-g$ est une fonction constante ; il est donc normal que sa dérivée soit nulle :
$(f-g)'=f'-g'=0$.
On a donc $f'=g'$, d'où le résultat de la question 1.